

**IV WOJEWÓDZKI KONKURS Z MATEMATYKI
DLA UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA
ŚWIĘTOKRZYSKIEGO**

Klucz odpowiedzi i zasady oceniania rozwiązań zadań

ETAP III – WOJEWÓDZKI

21 lutego 2020 r., godz. 10.00

Liczba punktów możliwych do uzyskania: 40

Zasady ogólne

1. Za każde poprawne rozwiązanie zadania otwartego inne niż w kluczu, przyznajemy maksymalną liczbę punktów.
2. Jeżeli uczeń pomimo polecenia typu *oblicz* nie przedstawił żadnych obliczeń, a napisał poprawną odpowiedź, to nie przyznajemy punktu za rozwiązanie zadania.
3. Jeżeli uczeń w zadaniach zamkniętych, zaznaczył zarówno poprawą jak i błędną odpowiedź (lub błędne odpowiedzi), nie przyznajemy punktu.
4. Jeżeli w zadaniu otwartym jest polecenie typu *Zapisz obliczenia i odpowiedź*, to oznacza, że uczeń przedstawi swoje rozumowanie i sformułuje odpowiedź lub poda ją w inny jednoznaczny sposób, np. podkreśli, zakreśli kółkiem.
5. Punkty przyznajemy zgodnie z kryteriami punktowania, nie wolno dzielić punktów.
6. Brudnopisy zamieszczone pod zadaniami 1–8 oraz na końcu pracy nie podlegają sprawdzeniu.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Numer zadania	Prawidłowa odpowiedź	Liczba punktów
1	C.	1
2	B.	1
3	A.	1
4	A.	1
5	C.	1
6	PP	2
7	PF	2
8	FPP	3

ZADANIA OTWARTE**Zadanie 9. (0–7)**

- a) W naczyniu jest 7 kilogramów solanki o stężeniu 6%. Ile dekagramów soli jest w tej solance? Zapisz obliczenia i odpowiedź.
- b) Ile kilogramów wody należy odparować z 7 kilogramów solanki o stężeniu 6%, aby otrzymać roztwór o stężeniu 8%? Zapisz obliczenia i odpowiedź.
- c) Ile kilogramów solanki o stężeniu 18% należy dolać do 7 kg solanki o stężeniu 6%, aby otrzymać roztwór o stężeniu 8%? Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Przykładowe rozwiązanie:

a) $0,06 \cdot 7 = 0,42$

$$0,42 \text{ kg} = 42 \text{ dag}$$

W tej solance jest 42 dag soli.

b) x – masa wody, którą należy odparować

$$0,42 = 0,08(7 - x)$$

$$x = 1,75$$

Odpowiedź: Należy odparować 1,75 kg

c) x – masa solanki o stężeniu 18%

$$0,42 + 0,18x = 0,08(7 + x)$$

$$0,1x = 0,14$$

$$x = 1,4$$

Odpowiedź: Należy dolać 1,4 kg solanki o stężeniu 18%.

Klucz punktowania:

a)

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza, ile dekagramów soli jest w 7 kilogramach solanki o stężeniu 6% (42 dag).

Uwaga.

Jeśli uczeń poda odpowiedź **0,42 kg** lub **420 g** należy **przyznać punkt**.

Jeśli uczeń zapisze liczbę **42** i **nie zapisze jednostki** należy **przyznać punkt**.

Jeśli uczeń zapisze w odpowiedzi **0,42** lub **420** i **nie zapisze jednostki** **nie przyznajemy punktu**).

b)

1 punkt – uczeń układa poprawne równanie, za pomocą którego może obliczyć masę wody, którą należy odparować.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązania ułożonego równania.

1 punkt – uczeń bezbłędnie oblicza masę wody, którą należy odparować (1,75 kg)

Uwaga.

Jeśli uczeń poda odpowiedź **175 dag** lub **1750 g** należy **przyznać punkt**.

Jeśli uczeń zapisze liczbę **1,75** i **nie zapisze jednostki** należy **przyznać punkt**.

Jeśli uczeń zapisze w odpowiedzi **175** lub **1750** i **nie zapisze jednostki** **nie przyznajemy punktu**).

c)

1 punkt – uczeń układa poprawne równanie, za pomocą którego może obliczyć masę solanki o stężeniu 18%, którą należy dolać.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązania ułożonego równania.

1 punkt – uczeń bezbłędnie oblicza masę solanki o stężeniu 18%, którą należy dolać (1,4 kg)

Uwaga.

Jeśli uczeń poda odpowiedź **140 dag** lub **1400 g** należy **przyznać punkt**.

Jeśli uczeń zapisze liczbę **1,4** i **nie zapisze jednostki** należy **przyznać punkt**.

Jeśli uczeń zapisze w odpowiedzi **140** lub **1400** i **nie zapisze jednostki** **nie przyznajemy punktu**).

Zadanie 10. (0–7)

Odległość środków dwóch kół stycznych wewnętrznie jest równa **9 cm**. Stosunek długości promieni tych kół jest równy **5: 8**. Oblicz różnicę pól tych kół. Zapisz obliczenia i odpowiedź.

Przykładowe rozwiązanie:

r_1 – promień jednego koła

r_2 – promień drugiego koła

Założmy, że $r_2 > r_1$.

$$r_2 - r_1 = 9.$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{8}$$

$$r_2 = 9 + r_1$$

$$\frac{r_1}{9 + r_1} = \frac{5}{8}$$

$$8r_1 = 5(9 + r_1)$$

$$r_1 = 15 \text{ (cm)}$$

$$r_2 = 24 \text{ (cm)}$$

$$P_1 = 225\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$P_2 = 576\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$P_2 - P_1 = 576\pi - 225\pi = 351\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Klucz punktowania:

1 punkt – uczeń wprowadza oznaczenia i zapisuje obie zależności ($r_2 - r_1 = 9$ oraz $\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{8}$).

1 punkt – uczeń, korzystając z zależności, zapisuje równanie z jedną niewiadomą, za pomocą którego może obliczyć długość promienia jednego koła.

1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę rozwiązania ułożonego równania.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza długości promieni obu kół (15 cm i 24 cm).

1 punkt – uczeń stosuje poprawny wzór na obliczenie pola koła.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pola obu kół $225\pi \text{ cm}^2$ i $576\pi \text{ cm}^2$.

1 punkt – uczeń poprawnie oblicza różnicę pól obu kół $351\pi \text{ cm}^2$.

Zadanie 11. (0–6)

Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, podzielnych przez 4, takich, że żadna cyfra w liczbie nie powtarza się? Przedstaw swoje rozumowanie i zapisz odpowiedź.

Przykładowe rozwiązania:

I sposób

Jeśli liczba ma być podzielna przez 4, to w rzędzie jedności musi być jedna z cyfr 0,2,4,6,8.

I przypadek

W rzędzie jedności jest 0. W rzędzie dziesiątek musi być jedna z cyfr: 2,4,6,8. Wykorzystaliśmy już dwie cyfry (w tym zero). Zatem w rzędzie setek musi być jedna z pozostałych 8 cyfr.

$$L_1 = 4 \cdot 8 = 32$$

II przypadek

W rzędzie jedności jest cyfra 4 lub cyfra 8, a w rzędzie dziesiątek jest 0. Zatem w rzędzie setek musi być jedna z pozostałych 8 cyfr (zero już wykorzystaliśmy)

$$L_2 = 2 \cdot 8 = 16$$

III przypadek

W rzędzie jedności jest cyfra 2 lub cyfra 6. W rzędzie dziesiątek musi być jedna z pięciu cyfr: 1,3,5,7,9. Wykorzystaliśmy już dwie cyfry. Zatem w rzędzie tysięcy może być jedna z pozostałych 7 cyfr (bo nie może być 0)

$$L_3 = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

IV przypadek

W rzędzie jedności jest 4 lub cyfra 8. W rzędzie dziesiątek musi być jedna z trzech cyfr: 2,6,8 lub odpowiednio 2,4,8. Wykorzystaliśmy już dwie cyfry. Zatem w rzędzie setek może być jedna z pozostałych 7 cyfr (bo nie może być 0).

$$L_4 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

$$L = 32 + 16 + 70 + 42 = 160$$

Wszystkich liczb czterocyfrowych podzielnych przez 4, mających różne cyfry jest 160.

II sposób

I przypadek

Liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 4 i w rzędzie jedności tej liczby jest cyfra zero lub liczba jednocyfrowa jest podzielna przez 4 (w rzędzie dziesiątek jest cyfra zero). Jest sześć takich możliwości: 20, 40, 60, 80, 04, 08.

$$L_1 = 6 \cdot 8 = 48$$

II przypadek

Liczba dwucyfrowa jest podzielna przez 4 i w rzędzie jedności i w rzędzie dziesiątek tej liczby są cyfry różne od zera. Jest szesnaście takich możliwości: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96.

$$L_2 = 16 \cdot 7 = 112.$$

$$L = 48 + 112 = 160$$

Klucz punktowania:

- 2 punkty – uczeń stosuje poprawną metodę wyznaczenia liczby liczb naturalnych trzycyfrowych, podzielnych przez 4, mających różne cyfry, w których w rzędzie jedności albo w rzędzie dziesiątek jest cyfra 0 (I i II przypadek w I sposobie, I przypadek w II sposobie).
- 2 punkty – uczeń stosuje poprawną metodę wyznaczenia liczby liczb naturalnych trzycyfrowych, podzielnych przez 4, mających różne cyfry, w których w rzędzie jedności i w rzędzie dziesiątek są cyfry różne od zera (III i IV przypadek w I sposobie, II przypadek w II sposobie).
- 2 punkty – uczeń podaje, że jest 160 wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, podzielnych przez 4, mających różne cyfry (1 punkt jeśli uczeń, na którymś z etapów rozwiązywania zadania popełnił błąd rachunkowy i podał wynik adekwatny do swoich wcześniejszych obliczeń).

Zadanie 12. (0–8)

Czarek wykonał z kartonu 7 modeli graniastosłupów o podstawie trójkąta równobocznego. Krawędź podstawy każdego modelu graniastosłupa była równa 2 cm. Gdy te modele były ułożone od najmniejszego do największego, to wysokości każdych dwóch sąsiednich modeli różniły się o 4 cm. Suma wysokości trzech najmniejszych modeli była równa wysokości największego modelu. Czarek ze wszystkich modeli zrobił jedną bryłę, kładąc jeden model graniastosłupa na drugim i sklejając stykające się podstawy. Jaka jest objętość i pole powierzchni tej bryły? Zapisz obliczenia i zapisz odpowiedź.

Przykładowe rozwiązanie:

I sposób

x – wysokość najmniejszego modelu graniastosłupa

$x, x + 4, x + 8, x + 12, x + 16, x + 20, x + 24$

$$x + x + 4 + x + 8 = x + 24$$

$$x = 6 \text{ (cm)}$$

$$P_p = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$P_p = \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$H = 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 = 126 \text{ (cm)}$$

$$V = 126\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$P = 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 126 = 2(\sqrt{3} + 378) \text{ (cm}^2\text{)}$$

II sposób

x – wysokość największego modelu graniastosłupa

$x, x - 4, x - 8, x - 12, x - 16, x - 20, x - 24$

$$x - 16 + x - 20 + x - 24 = x$$

$$x = 30 \text{ (cm)}$$

$$P_p = \frac{4\sqrt{3}}{4}$$

$$P_p = \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$V_1 = 6\sqrt{3}, V_2 = 10\sqrt{3}, V_3 = 14\sqrt{3}, V_4 = 18\sqrt{3}, V_5 = 22\sqrt{3}, V_6 = 26\sqrt{3}, V_7 = 30\sqrt{3}$$

$$V = 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 14\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 22\sqrt{3} + 26\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 126\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$P_1 = 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot \sqrt{3} = 36 + 2\sqrt{3}, P_2 = 3 \cdot 2 \cdot 10 + 2 \cdot \sqrt{3} = 60 + 2\sqrt{3},$$

$$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 14 + 2 \cdot \sqrt{3} = 84 + 2\sqrt{3}, P_4 = 3 \cdot 2 \cdot 18 + 2 \cdot \sqrt{3} = 108 + 2\sqrt{3},$$

$$P_5 = 3 \cdot 2 \cdot 22 + 2 \cdot \sqrt{3} = 132 + 2\sqrt{3}, P_6 = 3 \cdot 2 \cdot 26 + 2 \cdot \sqrt{3} = 156 + 2\sqrt{3},$$

$$P_7 = 3 \cdot 2 \cdot 30 + 2 \cdot \sqrt{3} = 180 + 2\sqrt{3}$$

$$P = 36 + 2\sqrt{3} + 60 + 2\sqrt{3} + 84 + 2\sqrt{3} + 108 + 2\sqrt{3} + 132 + 2\sqrt{3} + 156 + 2\sqrt{3} + 180 + 2\sqrt{3} - 12 \cdot \sqrt{3} = 756 + 2\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

Klucz punktowania:

- 1 punkt – uczeń oznacza wysokość najmniejszego (lub największego) modelu graniastosłupa i zapisuje zależności między wysokościami modeli graniastosłupów
- 1 punkt – uczeń zapisuje za pomocą równania zależność między sumą wysokości trzech najmniejszych modeli graniastosłupów i wysokością największego modelu graniastosłupa oraz stosuje poprawną metodę rozwiązania ułożonego równania.
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza wysokość najmniejszego (6 cm) lub największego (30 cm) modelu graniastosłupa.
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole podstawy graniastosłupa ($\sqrt{3} \text{ cm}^2$).
- 1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia objętości bryły powstałej ze sklejenia modeli graniastosłupów.
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza objętość bryły powstałej ze sklejenia modeli graniastosłupów ($126\sqrt{3} \text{ cm}^3$).
- 1 punkt – uczeń stosuje poprawną metodę obliczenia pola powierzchni całkowitej bryły powstałej ze sklejenia modeli graniastosłupów.
- 1 punkt – uczeń poprawnie oblicza pole powierzchni całkowitej bryły powstałej ze sklejenia modeli graniastosłupów $2(\sqrt{3} + 378) \text{ cm}^2$

Jeśli uczeń policzy pole powierzchni lub objętość bryły i nie zapisze jednostki pola powierzchni lub jednostki objętości bryły lub zapisze je błędne, to należy od dodatniej sumy punktów uzyskanych za rozwiązanie tego zadania odjąć 1 punkt (uczeń może otrzymać od 0 do 7 punktów).